

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра штучного інтелекту та програмного забезпечення

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

Проректор

в науково-педагогічній роботі

А.В. Пантелеймонов

08 2019 р.



**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**Алгоритми комп'ютерної фізики**

рівень вищої освіти	перший (бакалаврський) рівень
галузь знань	12 Інформаційні технології
напрямок	122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології
освітня програма	
спеціалізація	
вид дисципліни	за вибором
факультет	комп'ютерних наук

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету комп'ютерних наук  
«27» червня 2019 року, протокол № 2

**РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:**

доктор фізико-математичних наук, професор кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення **Буц В'ячеслав Олександрович.**

Програму схвалено на засіданні кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення

Протокол від «29» травня 2019 року № 11


Завідувач кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення

  
\_\_\_\_\_ (Куклін В.М.)

Програму погоджено методичною комісією факультету комп'ютерних наук

Протокол від «20» червня 2019 року № 9

Голова методичної комісії факультету комп'ютерних наук

  
\_\_\_\_\_ (Бердніков А.Г.)

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Алгоритми комп'ютерної фізики» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, напрям підготовки: 6.050101 «Комп'ютерні науки».

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Формування у студентів теоретичних знань та практичних навичок у застосуванні методів математичного моделювання для комп'ютерного дослідження складних фізичних процесів. Зокрема для дослідження складної лінійної та нелінійної динаміки фізичних систем. Важливою метою також є вказати студентам шлях як «навчити» комп'ютер щоб він давав відповіді на питання, що нас хвилюють, а також навчити їх нелінійному мисленню.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є:

- ознайомлення з ключовими елементами, які описують лінійні та нелінійні процеси у фізичних системах;
- навчання майбутніх фахівців теорії та практиці застосування математичного моделювання. Зокрема вірного використання законів збереження та інтегралів;
- навчання розглядіти у складних математичних (комп'ютерних) розрахунках ключеві елементи, що характеризують динаміку процесу.

1.3. Кількість кредитів – 4

1.4. Загальна кількість годин – 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Нормативна / за вибором	
денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
4-й	
Семестр	
8-й	
Лекції	
24 год.	_____ год.
Практичні, семінарські заняття	
_____ год.	_____ год.
Лабораторні заняття	
24 год.	_____ год.
Самостійна робота	
72 год.	_____ год.
Індивідуальні завдання	
_____ год.	_____ год.

1.3. Згідно з вимогами освітньо-професійної програми, студенти мають досягти таких результатів навчання:

**мати уявлення:**

- про створення математичних моделей складних фізичних процесів, про математичні пакети, що дозволяють аналізувати динаміку систем, що вивчаються за допомогою комп'ютерів;

**знати:**

- головні теоретичні положення лінійної та нелінійної фізики;
- математичні методи, що застосовуються при розв'язанні задач теорії дослідження нелінійної динаміки;
- області та особливості застосування методів нелінійної динаміки.

**вміти:**

- будувати математичні моделі на основі фізичного формулювання задач;
- обрати математичний пакет для коректного комп'ютерного дослідження поставлених практичних задач;
- застосовувати методи дослідження операції;
- використовуючи ключеві елементи нелінійної динаміки аналізувати отримані результати та давати їх фізичну інтерпретацію.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

*Розділ 1. Введення до нелінійної динаміки.*

*Тема 1. Введення у дослідження нелінійної динаміки.*

Лінійні осцилятори з загасанням. Автономні системи. Консервативні системи. Принцип суперпозиції. Особливі (стаціонарні) точки. Класифікація особливих точок: стійкий та нестійкий фокуси; центри, вузли, сідлові точки.

*Тема 2. Біфуркації.*

Приклади найбільш важливих біфуркацій.

*Тема 3. Фазовий простір.*

Розмірність фазового простору. Інтегральні криві. Особливі траєкторії (сепаратриси).

*Тема 4. Ізохронні та неізохронні коливання.*

Позитивне та негативне тертя.

*Тема 5. Резонанси.*

Обмеження рівня коливань при резонансах, які обумовлені загасанням. Параметричний резонанс. Вплив загасання на параметричний резонанс (поріг параметричної нестійкості). Теорема Флоке.

*Розділ 2. Алгоритми побудови математичних моделей, типу моделі "Мир-1", яка описує динаміку економіки Миру*

*Тема 1. Зв'язані лінійні осцилятори.*

Парціальні та нормальні частоти. Зв'язок між ними. Вплив зовнішньої сили на систему з двох зв'язаних осциляторів. Теорема взаємності.

*Тема 2. Фундаментальні ефекти нелінійності. Якісний рівень.*

Неізохронність. Анггармонізм.

*Розділ 3. Алгоритми аналізу складних явищ, які виникають при їх комп'ютерному моделюванні.*

*Тема 1. Автоколивання.*

Мультистабільність. Басейни притягання.

*Тема 2. Виникнення непередбачення.*

Найпростіші приклади обґрунтування статистичної фізики. Зіткнення пружних куль. Точечне відображення. Січна без точок торкання. Діаграма Ламерея. Драбина Ламерея. Стационарні точки. Стійкість стационарних точок. Мультиплікатор. Виникнення циклів. Стійкі та нестійкі цикли. Біфуркація. Біфуркація Фейгенбаума. Сценарії переходу до динамічного хаосу

*Тема 3. Динамічний хаос.*

Парадигми динамічного хаосу: нелінійність; локальна нестійкість; число ступенів вільності більше або рівняється 1.5. Критерії динамічного хаосу. Критерії Ляпунова. Критерії Мельнікова. Критерії Чирікова Критерій Ляпунова виникнення динамічного хаосу.

*Розділ 4. Розв'язання практичних задач за допомогою MathCad, MATLAB та Mathematica.*

*Тема 1. Рівняння Ван-дер-Поля.*

Механізми виникнення гармонік та субгармонік.

*Тема 2. Граничні цикли.*

Стійкі та нестійкі граничні цикли. Теорема Бендиксона. М'яке та жорстке збудження автоколивань. Релаксаційні автоколивання

*Тема 3. Біфуркації.*

Біфуркація Андронова-Хопфа. Гістерезис. Рівняння Дюффінга. Біфуркація злиття стійкого та нестійкого стану – катастрофа. Дисипативні системи.

Стиснення фазового об'єму.

*Розділ 5. Розв'язання практичних задач відносно до хаотичної динаміки (за допомогою MathCad, MATLAB та Mathematica).*

*Тема 1. Квантовий ефект Зенона - як приклад динаміки лінійних осциляторів.*

Ефект квантової дзиги.

*Тема 2. Вторинні резонанси.*

Можливість параметричного збудження двох зв'язаних високочастотних осциляторів зовнішнім низькочастотним збудженням.

*Тема 3. Перехід до глобальної стохастичності.*

Динаміка руху зарядженої частинки в полі двох повздовжніх електромагнітних хвиль. Ергодичність. Умови виникнення ергодичності.

## 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
л		п	лаб	інд	ср	
<b>Розділ 1. Введення до нелінійної динаміки</b>						
Тема 1. Введення у дослідження нелінійної динаміки.	10	2		2		6
Тема 2. Біфуркації	10	2		2		6
Тема 3. Фазовий простір	10	2		2		6
Тема 4. Ізохронні та неізохронні коливання. Резонанси	10	2		2		6
<b>Разом за розділом 1</b>	<b>40</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>8</b>	<b>0</b>	<b>24</b>
<b>Розділ 2. Алгоритми побудови математичних моделей, типу моделі "Мир-1", яка описує динаміку економіки Миру</b>						
Тема 1. Зв'язані лінійні осцилятори	10	2		2		6
Тема 2. Фундаментальні ефекти нелінійності. Якісний рівень	10	2		2		6
<b>Разом за розділом 2</b>	<b>20</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>12</b>
<b>Розділ 3. Алгоритми аналізу складних явищ, які виникають при їх комп'ютерному моделюванні.</b>						
Тема 1. Автоколивання	10	2		2		6
Тема 2. Виникнення не передбачення. Динамічний хаос	10	2		2		6
<b>Разом за розділом 3</b>	<b>20</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>12</b>
<b>Розділ 4. Розв'язання практичних задач за допомогою MathCad, MATLAB та Mathematica</b>						
Тема 1. Рівняння Ван-дер-Поля.	10	2		2		6
Тема 2. Граничні цикли	10	2		2		6
<b>Разом за розділом 4</b>	<b>20</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>12</b>
<b>Розділ 5. Розв'язання практичних задач відносно до хаотичної динаміки (за допомогою MathCad, MATLAB та Mathematica)</b>						
Тема 1. Квантовий ефект Зенона.	10	2		2		6
Тема 2. Вторинні резонанси. Перехід до глобальної стохастичності	10	2		2		6
<b>Разом за розділом 5</b>	<b>20</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>12</b>
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>24</b>	<b>0</b>	<b>24</b>	<b>0</b>	<b>72</b>

#### 4. Теми практичних (лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
<b>Розділ 1. Введення до нелінійної динаміки</b>		
1	Введення у дослідження нелінійної динаміки. За допомогою математичного пакету Matlab або Mathcad створити програму комп'ютерного дослідження руху лінійного осцилятора з загасанням. Дослідити у рамках цих програм принцип суперпозиції. Особливі (стаціонарні) точки Використовуючи програми, що описують рух осциляторів, дослідити особливості руху у колі особливих точок. Дослідити різницю між стійкими та нестійкими точками.	2
2	Біфуркації Запрограмувати дослідження за допомогою комп'ютера осцилятора Ван-Дер-Поля. Знайти біфуркаційні параметри цього осцилятора.	2
3	Фазовий простір Запрограмувати та дослідити динаміку математичного маятника. Знайти і дослідити особливості особливих точок та особливих траєкторій.	2
4	«Ізохронні та неізохронні коливання». На прикладі динаміки осцилятора Ван-Дер-Поля та динаміки лінійного осцилятора дослідити різницю між ізохронними та не ізохронними коливаннями. «Резонанси». Чисельними методами дослідити механізм стабілізації рівня лінійного осцилятора за рахунок наявності загасання. Порівняти ці результати з впливом загасання на осцилятори, що параметрично збуджуються. Знайти поріг параметричної нестійкості.	2
<b>Розділ 2. Алгоритми побудови математичних моделей, типу моделі "Мир-1", яка описує динаміку економіки Миру</b>		
1	«Зв'язані лінійні осцилятори». Створити програму, що описує коливання системи пов'язаних лінійних осциляторів. Дослідити появу нормальних часток. Порівняти нормальні та парціальні частоти.	2
2	«Фундаментальні ефекти нелінійності. Якісний рівень» На прикладах динаміки математичного маятника та осцилятора Ван-Дер-Поля дослідити ефекти не ізохронності та ангармонізму.	2
<b>Розділ 3. Алгоритми аналізу складних явищ, які виникають при їх комп'ютерному моделюванні.</b>		
1	Другий універсальний гамільтоніан – осцилятор Дюфінга. Басейни притягання осцилятора Дюфінга.	2
2	Переходи між стабільними станами мультистабільних систем. Вплив зовнішнього та регулярного та шумового сигналу на осцилятор Дюфінга.	2
<b>Розділ 4. Розв'язання практичних задач за допомогою MathCad, MATLAB та Mathematica</b>		
1	Сталі та несталі граничні цикли. Знаходження циклів в математичній моделі осцилятора Ван-дер-Поля.	2
2	Біфуркація Хопфа. Локальна нестійкість. М'яке та жорстке збудження автоколивань.	2
<b>Розділ 5. Розв'язання практичних задач відносно до хаотичної динаміки (за допомогою MathCad, MATLAB та Mathematica)</b>		
1	Дробина Ламерея. Критерії локальної нестійкості. Логістичне відображення.	2
2	Нелінійні резонанси. Критерії Чірікова перекриття нелінійних резонансів. Взаємодія типу волна-хвиля. Взаємодії типу хвиля-хвиля. Модифіковані моделі взаємодії хвиль. Стохастичний розпад хвиль.	2
<b>Разом</b>		<b>24</b>

### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
<b>Розділ 1. Введення до нелінійної динаміки</b>		
1	Вивчення сучасного стану досліджень в галузі нелінійної динаміки.	6
2	Вивчити характер особливих (стаціонарних) точок, які використовуються.	4
3	Зв'язок теорії біфуркації з теорією катастроф.	4
4	Вивчити які найбільш поширені простори (Фазовий простір; простір параметрів; біфуркаційні діаграми)	4
5	Лінійні та нелінійні резонанси. Синхронізація. Характерні особливості резонансів. Умови синхронізації.	6
<b>Розділ 2. Алгоритми побудови математичних моделей, типу моделі "Мир-1", яка описує динаміку економіки Миру</b>		
1.	Динаміка системи пов'язаних лінійних осциляторів. Парціальні та нормальні коливання. Зв'язок між ними. Теорема взаємності. Динамічне демпфірування.	3
2.	Головні критерії побудови математичних нелінійних моделей, які описують складну нелінійну еволюцію. Аналогом є модель «Мир-1».	4
3	Підготовка до контрольної роботи	5
<b>Розділ 3. Алгоритми аналізу складних явищ, які виникають при їх комп'ютерному моделюванні.</b>		
1.	Механізми виникнення не передбачення. Моделі з динамічним хаосом та моделі при наявності зовнішнього адитивного та мультиплікативного шуму.	4
2.	Дискретні та неперервні моделі з хаотичною динамікою.	4
3.	Спектральний та кореляційний аналіз регулярних та хаотичних процесів.	4
<b>Розділ 4. Розв'язання практичних задач за допомогою MathCad, MATLAB та Mathematica</b>		
1	Механізми виникнення сталих та несталих граничних циклів. Умови, які необхідні для виникнення граничних циклів.	2
2	Види біфуркацій. Умови виникнення локальної нестійкості.	2
3	Умови, які необхідно виконати для появи м'якого або жорсткого збудження.	3
4	Підготовка до контрольної роботи	5
<b>Розділ 5. Розв'язання практичних задач відносно до хаотичної динаміки (за допомогою MathCad, MATLAB та Mathematica)</b>		
1	Графічне зображення точкових відображень (Дробина Ламерея). Критерії стійкості та нестійкості. Цикли. Важливі точкові відображення.	4
2	Характеристики нелінійних резонансів. Критерії Мельнікова виникнення гомоклінічної структури.	4
3	Вивчення взаємодій типу частинка-хвиля та хвиля-хвиля. Стохастичний розпад хвиль.	4
	<b>Разом</b>	<b>72</b>

### 6. Індивідуальні завдання

1 контрольна робота



## 7. Методи контролю

Контроль засвоєння навчального матеріалу здійснюється шляхом:

- поточного контролю під час проведення практичних занять;
- прийому та оцінювання звітів з виконання лабораторних робіт;
- проведення тестування за результатами відпрацювання основних положень навчальної програми;
- проведення письмового підсумкового контролю знань.

## 8. Схема нарахування балів

**Розподіл балів для підсумкового семестрового контролю при проведенні семестрового екзамену.**

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання										Разом	Залік ва робота	Сума	
Розділ 1				Розділ 2				Контроль на					
T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	1	2	в і д у а л ь н е з а в д а			
5	5	5	5	5	5	5	5	10	10	-	60	40	100

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

### КРИТЕРІЇ ОЦІНКИ УСПІШНОСТІ ТА РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ З КУРСУ «Алгоритми комп'ютерної фізики»

№	Форми навчальної діяльності	Кількість балів	Термін	Примітки
1	Відвідування лекцій	5		
2	Відвідування практичних занять	5		
3	Звіти для поточного контролю (два звіта)	10+10		
4	Дві контрольні роботи	15+15		
5	Підсумковий контроль (Залік)	40		
6	<b>ВСЬОГО</b>	<b>100</b>		
8	<b>Додаткові бали (бонуси):</b> Підготовка доповіді з теми яка розширює курс; Відповідь на додаткові питання для підсумкового контролю.			

#### Відвідування лекцій:

- 5 балів:** студент відвідав 90 - 100 % лекційних занять;
- 4 бали:** студент відвідав 66 - 89 % лекційних занять;
- 3 бали:** студент відвідав 41 - 65 % лекційних занять;
- 2 балів:** студент відвідав 21 - 40% лекційних занять;
- 1 бал:** студент відвідав 1- 20 % лекційних занять;
- 0 балів:** студент не відвідував лекційні заняття.

### Відвідування практичних занять:

- 5 балів:** студент відвідав 90 - 100 % практичних занять;  
**4 балів:** студент відвідав 66 - 89 % практичних занять;  
**3 балів:** студент відвідав 41 - 65 % практичних занять;  
**2 бали:** студент відвідав 21 - 40% практичних занять;  
**1 бал:** студент відвідав 1- 20 % практичних занять;  
**0 балів:** студент не відвідував практичні заняття.

### Критерії оцінювання знань студентів під час поточного контролю (один звіт).

#### 10 балів:

- звіт підготовлений вчасно;
- звітну доповідь побудовано послідовно, системно, логічно;
- звіт є послідовним та виходить із поставлених задач;

#### 8 бали:

- звіт підготовлений вчасно;
- звітну доповідь *побудовано в цілому* послідовно, логічно;
- звіт *є в цілому* послідовним та виходить із поставлених задач;

#### 5 бали:

- звіт підготовлений із запізненням;
- звітну доповідь *побудовано в цілому* послідовно;
- результати виконання задач *в цілому* показані;

#### 2 бали:

- звіт підготовлений не вчасно;
- звітну доповідь побудовано не завжди послідовно;
- результати роботи показані, але не в повному обсязі та розпливчато;

#### 1 бал:

- звіт підготовлений не вчасно;
- звітну доповідь побудовано здебільшого незадовільно;
- результати роботи не показані;

#### 0 балів:

звітна доповідь відсутня.

### Критерії оцінювання контрольної роботи:

Студент має виконати контрольну роботи з курсу «Алгоритми комп'ютерної фізики», яка передбачена навчальним планом підготовки.

#### 15-13 балів:

- студент демонструє глибоке розуміння теми питання;
- студент повністю розкриває сутність питання;
- в роботі наведені приклади, якщо це необхідно;
- текст роботи викладено лаконічно, чітко, логічно та послідовно;
- робота демонструє високий рівень засвоєння матеріалу курсу.

#### 12-9 балів:

- студент демонструє розуміння теми питання;
- студент *в цілому* розкриває сутність питання;
- в роботі наведені *деякі з необхідних* прикладів;
- текст роботи викладено в цілому логічно та послідовно;
- робота демонструє середній рівень засвоєння матеріалу курсу.

#### 8-5 балів:

- студент демонструє базове розуміння теми питання;
- студент частково розкриває сутність питання;
- в роботі не наведені необхідні приклади;
- текст роботи *викладено в цілому* логічно, але не завжди послідовно;
- робота демонструє задовільний рівень засвоєння матеріалу курсу.

**4-2 балів:**

- студент демонструє часткове розуміння теми питання;
- студент не достатньо розкриває сутність питання;
- в роботі не наведені необхідні приклади;
- текст роботи викладено дещо хаотично та не завжди логічно;
- робота демонструє часткове засвоєння матеріалу курсу.

**1-2 балів:**

- студент дещо помилково розуміє тему питання;
- студент не розкриває сутність питання;
- в роботі не наведені необхідні приклади;
- текст роботи викладено хаотично та не логічно;
- робота демонструє незадовільний рівень засвоєння матеріалу курсу.

**0 балів:** робота відсутня.

### **Критерії оцінювання залікових робіт студентів**

**40 балів:** При відповіді на екзаменаційний квиток теоретичні питання освітлені повністю, завдання вирішене правильно, зроблені висновки

**35-39 балів:** При відповіді на екзаменаційний квиток теоретичні питання достатньо освітлені, завдання вирішене правильно з незначними помилками, зроблені висновки

**34-25 балів:** При відповіді на екзаменаційний квиток теоретичні питання освітлені з помилками, завдання вирішене правильно з незначними помилками. Зроблені неповні висновки

**24-15 балів:** При відповіді на екзаменаційний квиток теоретичні питання освітлені з суттєвими помилками, завдання вирішене з помилками. Зроблені неповні висновки

**14-1 балів:** При відповіді на екзаменаційний квиток теоретичні питання освітлені з суттєвими помилками, завдання вирішене частково або не повністю. Висновки неповні або відсутні

## **9. Рекомендована література**

### **Основна література**

1. Х. Гулд, Я. Тобочник Компьютерное моделирование в физике: Часть 1 и часть 2.
2. Трубецков Д.И., Рожнёв А.Г. Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
3. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука, Физматлит, 2000. 272 с.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981, 586 с.
6. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М., Наука, 1987, 384 с.
7. Горелик Г.С. Колебания и волны. Физматгиз, 1959.
8. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988, 368 с.
9. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
10. Мандельштам Л.И. Лекции по колебаниям. М.: Изд. АН СССР, 1955.

11. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М., Наука, 1978.
12. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984, 432 с.
13. Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры. В сб. Физика XX века: Развитие и перспективы. М.: Наука, 1984. С. 219–280.
14. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984, 271 с.
15. Заславский Г.М., Чириков Б.В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. УФН. 1971. Т.105, №1. С. 3–40.
16. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., Наука, 1978. 512с.
17. Лихтенберг А., М. Либерман. Регулярная и хаотическая динамика. М.: Мир, 1984.
18. Нелинейные волны. Самоорганизация. Под ред. Гапонова-Грехова А.В. и Рабиновича М.И. М.: Наука, 1983, 264 с.
19. Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. Под ред. Гапонова-Грехова А.В. и Рабиновича М.И. М.: Наука, 1987.
20. Нелинейные волны. Динамика и эволюция. Под ред. Гапонова-Грехова А.В. и Рабиновича М.И. М.: Наука, 1989, 400 с.
21. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М., Наука, 1986. 288с.